抽象代数课程教学的思考与实践

冯荣权
fengrq@math.pku.edu.cn

北京大学数学科学学院

2023 年 3 月 25 日

福建省《高等代数》与《线性代数》课程建设第二十二次研讨会

代数学

- 代数学是一门语言, 是集合、符号和思维的语言.

代数学

- 代数学是一门语言，是集合、符号和思维的语言.
- 古典代数学讨论数的运算 (算术) 以及解 (代数) 方程. 现代代数学是对算术的推广，它根据算术法则把一些表示数的字母结合起来，它研究的是抽象实体 (集合，其元素如复数、矩阵、向量等) 以符号形式进行运算——通常类似于算术运算——之后的性质和关系.

代数学

- 代数学是一门语言，是集合、符号和思维的语言.
- 古典代数学讨论数的运算 (算术) 以及解 (代数) 方程. 现代代数学是对算术的推广，它根据算术法则把一些表示数的字母结合起来，它研究的是抽象实体 (集合，其元素如复数、矩阵、向量等) 以符号形式进行运算——通常类似于算术运算——之后的性质和关系.
- 解析几何：利用代数的方法来研究几何上的问题.

代数学

- 代数学是一门语言, 是集合、符号和思维的语言.
- 古典代数学讨论数的运算 (算术) 以及解 (代数) 方程. 现代代数学是对算术的推广, 它根据算术法则把一些表示数的字母结合起来, 它研究的是抽象实体 (集合, 其元素如复数、矩阵、向量等) 以符号形式进行运算——通常类似于算术运算——之后的性质和关系.
- 解析几何: 利用代数的方法来研究几何上的问题.
- 对代数量的几何解释, 也影响了数学与科学的其他分支. 比如解析几何学的语言经过稍微修改与推广之后, 就变成了分析学的语言. 现在几何学家与分析学家基本的概念方法之一仍然是把代数符号解释成几何量或物理量.

- 代数学是一门语言，是集合、符号和思维的语言.
- 古典代数学讨论数的运算 (算术) 以及解 (代数) 方程. 现代代数学是对算术的推广，它根据算术法则把一些表示数的字母结合起来，它研究的是抽象实体 (集合，其元素如复数、矩阵、向量等) 以符号形式进行运算——通常类似于算术运算——之后的性质和关系.
- 解析几何: 利用代数的方法来研究几何上的问题.
- 对代数量的几何解释，也影响了数学与科学的其他分支. 比如解析几何学的语言经过稍微修改与推广之后，就变成了分析学的语言. 现在几何学家与分析学家基本的概念方法之一仍然是把代数符号解释成几何量或物理量.
- 1872 年，23 岁的德国人克莱因 (Klein) 在 Erlangen 大学为其教授就职的演讲“关于近代几何学的比较考察”中提出，每一种几何对应一个变换群，这种几何研究的对象是各种形体在相应变换群下不变的性质. 这后来便称为 Erlangen 纲领.

代数学

- 代数学是一门语言，是集合、符号和思维的语言.
- 古典代数学讨论数的运算 (算术) 以及解 (代数) 方程. 现代代数学是对算术的推广，它根据算术法则把一些表示数的字母结合起来，它研究的是抽象实体 (集合，其元素如复数、矩阵、向量等) 以符号形式进行运算——通常类似于算术运算——之后的性质和关系.
- 解析几何: 利用代数的方法来研究几何上的问题.
- 对代数量的几何解释，也影响了数学与科学的其他分支. 比如解析几何学的语言经过稍微修改与推广之后，就变成了分析学的语言. 现在几何学家与分析学家基本的概念方法之一仍然是把代数符号解释成几何量或物理量.
- 1872 年，23 岁的德国人克莱因 (Klein) 在 Erlangen 大学为其教授就职的演讲“关于近代几何学的比较考察”中提出，每一种几何对应一个变换群，这种几何研究的对象是各种形体在相应变换群下不变的性质. 这后来便称为 Erlangen 纲领.
- 按此观点，构成每种几何支柱的统一的基本概念是变换群. 例如欧氏几何对应的群就是所谓“欧氏变换群”，即正交变换群，它里面的元素包括旋转，反射以及它们的复合作用.

代数类课程思考

- 相比于分析课程, 代数 (以及几何) 类课程教学在中国高校中非常薄弱, 使得对大学生的代数方面的训练远远不够. 课程少、教学内容不足, 这是一个长期存在的问题, 它直接影响我国数学研究的水平 (例如当前的代数组合学研究需要交换代数和群表示理论、多复变和微分几何研究需要上同调理论、控制理论研究需要模论), 也影响了我国科技水平的进步.

代数类课程思考

- 相比于分析课程, 代数 (以及几何) 类课程教学在中国高校中非常薄弱, 使得对大学生的代数方面的训练远远不够. 课程少、教学内容不足, 这是一个长期存在的问题, 它直接影响我国数学研究的水平 (例如当前的代数组合学研究需要交换代数和群表示理论、多复变和微分几何研究需要上同调理论、控制理论研究需要模论), 也影响了我国科技水平的进步.
- 不夸张地说, 现在中国很多高校的代数类课程还达不到西南联大的程度. 从冯绪宁、袁向东所著《中国近代代数学简编》一书中可知, 西南联大数学系必修课程中代数学方面的有高等代数 (二年级必修, 所用教材: M. Bocher, Higher Algebra 或 C. MacDoffee, An Introduction to Abstract Algebra 或 H. Hasse, Hohere Algebra, 有时以线性代数来代替)、近世代数 (三、四年级必修, 教材取自 B.L. van der Waerden 的 Moderne Algebra).

- 相比于分析课程, 代数 (以及几何) 类课程教学在中国高校中非常薄弱, 使得对大学生的代数方面的训练远远不够. 课程少、教学内容不足, 这是一个长期存在的问题, 它直接影响我国数学研究的水平 (例如当前的代数组合学研究需要交换代数和群表示理论、多复变和微分几何研究需要上同调理论、控制理论研究需要模论), 也影响了我国科技水平的进步.
- 不夸张地说, 现在中国很多高校的代数类课程还达不到西南联大的程度. 从冯绪宁、袁向东所著《中国近代代数学简编》一书中可知, 西南联大数学系必修课程中代数学方面的有高等代数 (二年级必修, 所用教材: M. Bocher, Higher Algebra 或 C. MacDoffee, An Introduction to Abstract Algebra 或 H. Hasse, Hohere Algebra, 有时以线性代数来代替)、近世代数 (三、四年级必修, 教材取自 B.L. van der Waerden 的 Moderne Algebra).
- 属于代数学 (包括数论) 的选修课有数论、初等数论、代数数论、解析数论、素数分布及黎曼 zeta 函数、连续群论、行列式及矩阵、群论、理想数理论. 此外还有代数、群论、解析数论、有限群、拓扑群等各种讨论班.

- 与其它国家相比，我们的代数学教学相差很多. 如在一些先进国家，数论和代数 (线性代数和抽象代数) 已成为计算机和通信工程师的通用语言和基本工具，而我国很少有大学、研究所等科研单位能够系统讲解与编码和密码相关的诸多数学理论课程.

- 与其它国家相比，我们的代数学教学相差很多. 如在一些先进国家，数论和代数 (线性代数和抽象代数) 已成为计算机和通信工程师的通用语言和基本工具，而我国很少有大学、研究所等科研单位能够系统讲解与编码和密码相关的诸多数学理论课程.
- 在一些国外数学家眼中，群的线性表示、模论 (环上的线性代数)、交换代数中的许多内容都看作是线性代数. 我们和国外数学强国对于代数学作用和地位在认识上有很大差距.

- 与其它国家相比, 我们的代数学教学相差很多. 如在一些先进国家, 数论和代数 (线性代数和抽象代数) 已成为计算机和通信工程师的通用语言和基本工具, 而我国很少有大学、研究所等科研单位能够系统讲解与编码和密码相关的诸多数学理论课程.
- 在一些国外数学家眼中, 群的线性表示、模论 (环上的线性代数)、交换代数中的许多内容都看作是线性代数. 我们和国外数学强国对于代数学作用和地位在认识上有很大差距.
- 为改变这种状况, 我们现在开设有比较多的代数类课程. 本科生代数方面的课程有《高等代数 I/II》(普通班和实验班, 专业基础课、大一)、《抽象代数》(专业核心课、大二上)、《代数学 (实验班)》(专业核心课、大二)、《群与表示》(专业选修课、大三下)、《数论基础》(专业选修课、大四上)、《基础代数几何》(专业选修课、大四下), 还有一些选修课, 如《组合数学》、《密码学》、《解析数论》等. 本科生也可以选择研究生的课程, 如《抽象代数 II》、《交换代数》、《同调代数》、《代数曲线》、《群论》、《有限域》、《数论 I》、《数论 II》、《代数几何 II》、《数论专题》、《模形式与数论》、《表示论专题》等.

- 下面介绍我们在最基础的课程——抽象代数方面的一些做法.

- 下面介绍我们在最基础的课程——抽象代数方面的一些做法.
- 抽象代数又称近世代数，是代数学的一部分，代数学主要研究的是代数结构以及代数结构之间的关系. 法国数学家 Galois 在十九世纪二、三十年代用代数结构——群和域来研究代数方程的根，建立了 Galois 理论，开创了代数学的研究. 二十世纪以来，数学得到了蓬勃发展，很多数学分支中都出现了代数结构，代数学自然而然就渗透到这些数学分支中，成为它们的基础.

抽象代数课程

- 下面介绍我们在最基础的课程——抽象代数方面的一些做法.
- 抽象代数又称近世代数, 是代数学的一部分, 代数学主要研究的是代数结构以及代数结构之间的关系. 法国数学家 Galois 在十九世纪二、三十年代用代数结构——群和域来研究代数方程的根, 建立了 Galois 理论, 开创了代数学的研究. 二十世纪以来, 数学得到了蓬勃发展, 很多数学分支中都出现了代数结构, 代数学自然而然就渗透到这些数学分支中, 成为它们的基础.
- 抽象代数是数学学院所有专业本科生必修的专业核心课程, 主要学习三个基本代数结构: 群、环、域以及它们的运算性质, 并用来解决数学和其它领域的问题. 该课程一方面与前序的高等代数等课程内容紧密联系, 另一方面, 它又为现代代数领域的各个分支奠定了基础, 是一门承上启下的课程.

抽象代数课程

- 下面介绍我们在最基础的课程——抽象代数方面的一些做法.
- 抽象代数又称近世代数, 是代数学的一部分, 代数学主要研究的是代数结构以及代数结构之间的关系. 法国数学家 Galois 在十九世纪二、三十年代用代数结构——群和域来研究代数方程的根, 建立了 Galois 理论, 开创了代数学的研究. 二十世纪以来, 数学得到了蓬勃发展, 很多数学分支中都出现了代数结构, 代数学自然而然就渗透到这些数学分支中, 成为它们的基础.
- 抽象代数是数学学院所有专业本科生必修的专业核心课程, 主要学习三个基本代数结构: 群、环、域以及它们的运算性质, 并用来解决数学和其它领域的问题. 该课程一方面与前序的高等代数等课程内容紧密联系, 另一方面, 它又为现代代数领域的各个分支奠定了基础, 是一门承上启下的课程.
- 基于它的基础地位, 北京大学数学系成立之初便设立该课程. 老一代数学家段学复、聂灵沼、丁石孙等逐步建立起全面先进的课程体系, 引领了国内该课程的建设. 1992 年聂灵沼、丁石孙两位先生所编写的教材《代数学引论》获第二届全国高等学校优秀教材特等奖.

课程目标和理念

- 从 1998 年开始, 依据北京大学创建世界一流大学的总体目标, 针对国际数学发展和培养创新型人才的迫切需要, 时任院长张继平院士提出教学改革. 抽象代数课程教学团队努力探索, 大力推进教学大纲修订、精品教材建设、高素质教师队伍培养和教学模式改革等实践. 随着时代的进步, 我们的改革也一直在前进.

课程目标和理念

- 从 1998 年开始，依据北京大学创建世界一流大学的总体目标，针对国际数学发展和培养创新型人才的迫切需要，时任院长张继平院士提出教学改革. 抽象代数课程教学团队努力探索，大力推进教学大纲修订、精品教材建设、高素质教师队伍培养和教学模式改革等实践. 随着时代的进步，我们的改革也一直在前进.
- 课程目标分三个方面. 知识方面：使学生掌握抽象代数的基本概念、基本理论和基本方法，受到代数学的基本训练；能力方面：培养学生数学的思维方式，把握代数学基本概念和相关知识的逻辑思维能力和数学抽象能力；素质方面：培养学生勇于探索的科学精神，树立正确的人生目标和理想信念，增强文化自信心与民族自豪感.

课程目标和理念

- 从 1998 年开始，依据北京大学创建世界一流大学的总体目标，针对国际数学发展和培养创新型人才的迫切需要，时任院长张继平院士提出教学改革. 抽象代数课程教学团队努力探索，大力推进教学大纲修订、精品教材建设、高素质教师队伍培养和教学模式改革等实践. 随着时代的进步，我们的改革也一直在前进.
- 课程目标分三个方面. 知识方面：使学生掌握抽象代数的基本概念、基本理论和基本方法，受到代数学的基本训练；能力方面：培养学生数学的思维方式，把握代数学基本概念和相关知识的逻辑思维能力和数学抽象能力；素质方面：培养学生勇于探索的科学精神，树立正确的人生目标和理想信念，增强文化自信心与民族自豪感.
- 理念是以育人为本. 我们创新培养方式，根据国家大力加强基础学科拔尖创新人才的战略需求，结合北京大学数学学院本科生源特别优秀的特点，我们在教学中特别注重给学生更大的自主学习空间，把课程由周四学时缩减为周三学时. 为此我们精选教学内容，以传授基本理论和提高学生的基本技能为核心，探索研究性学习的课堂教学模式，适当选择有历史重要性和典型性的问题和例子，培养和提升学生的创新能力和抽象思维能力.

教学大纲

- 这是 2022 版教学大纲, 周三学时共 48 学时, 其中带 * 部分为选讲内容.

- 这是 2022 版教学大纲, 周三学时共 48 学时, 其中带 * 部分为选讲内容.
- 引言 (4 学时): 抽象代数的研究对象, 集合与映射, 等价与等价类, 偏序集与 Zorn 引理, 运算, 群、环、域的概念和简单性质.

教学大纲

- 这是 2022 版教学大纲, 周三学时共 48 学时, 其中带 * 部分为选讲内容.
- 引言 (4 学时): 抽象代数的研究对象, 集合与映射, 等价与等价类, 偏序集与 Zorn 引理, 运算, 群、环、域的概念和简单性质.
- 群 (20 学时): 群的典型例子, 对称群及交错群, 子群, 群的同态与同构, 群的自同构, 循环群, 元素的阶, 整数模 n 的乘法群, 群在集合上的作用, 轨道分解, Cayley 定理, 陪集, Lagrange 定理, 轨道-稳定子定理, 共轭类, 类方程, p-群, 正规子群和商群, 单群, 群同态基本定理, 群同构定理, 群的直积, *群的半直积, Sylow 定理及其应用, 有限 Abel 群的结构, 换位子群, 可解群, *合成群列, *自由群, *群的定义关系, *正多面体和有限旋转群.

教学大纲

- 这是 2022 版教学大纲, 周三学时共 48 学时, 其中带 * 部分为选讲内容.
- 引言 (4 学时): 抽象代数的研究对象, 集合与映射, 等价与等价类, 偏序集与 Zorn 引理, 运算, 群、环、域的概念和简单性质.
- 群 (20 学时): 群的典型例子, 对称群及交错群, 子群, 群的同态与同构, 群的自同构, 循环群, 元素的阶, 整数模 n 的乘法群, 群在集合上的作用, 轨道分解, Cayley 定理, 陪集, Lagrange 定理, 轨道-稳定子定理, 共轭类, 类方程, p-群, 正规子群和商群, 单群, 群同态基本定理, 群同构定理, 群的直积, *群的半直积, Sylow 定理及其应用, 有限 Abel 群的结构, 换位子群, 可解群, *合成群列, *自由群, *群的定义关系, *正多面体和有限旋转群.
- 环 (12 学时): 环的类型和例, 环的直和, 多项式环, 四元数除环, 子环、同态和理想, 商环, 环同态基本定理, 环的特征, 环同构定理, 中国剩余定理, 素理想和极大理想, 域的构造, *分式域, 唯一分解整环, *Noether环, 主理想整环, Euclid整环, *唯一分解整环上的多项式环.

教学大纲

- 域扩张 (6 学时): 域扩张, 有限扩张, 代数扩张, 单扩张, 尺规作图问题, 多项式的分裂域, 正规扩张, 有限域, 可分扩张.

教学大纲

- 域扩张 (6 学时): 域扩张, 有限扩张, 代数扩张, 单扩张, 尺规作图问题, 多项式的分裂域, 正规扩张, 有限域, 可分扩张.
- Galois 理论 (6 学时): 域扩张的自同构, Galois 群, Galois 基本定理, 多项式的 Galois群, 代数方程可根式解问题.

- 域扩张 (6 学时): 域扩张, 有限扩张, 代数扩张, 单扩张, 尺规作图问题, 多项式的分裂域, 正规扩张, 有限域, 可分扩张.
- Galois 理论 (6 学时): 域扩张的自同构, Galois 群, Galois 基本定理, 多项式的 Galois群, 代数方程可根式解问题.
- 精选教学内容, Galois 理论是代数学史上, 以至于整个数学史上一颗璀璨的明珠, 也是近代代数学的起源所在, 所以课程里一定要包含这方面内容, 也要给出“特征为 0 的域上代数方程有根式解当且仅当其 Galois 群可解”这个重要结论的证明. 课程从群讲起, 也以群来结束.

教学大纲

- 域扩张 (6 学时): 域扩张, 有限扩张, 代数扩张, 单扩张, 尺规作图问题, 多项式的分裂域, 正规扩张, 有限域, 可分扩张.
- Galois 理论 (6 学时): 域扩张的自同构, Galois 群, Galois 基本定理, 多项式的 Galois群, 代数方程可根式解问题.
- 精选教学内容, Galois 理论是代数学史上, 以至于整个数学史上一颗璀璨的明珠, 也是近代代数学的起源所在, 所以课程里一定要包含这方面内容, 也要给出"特征为 0 的域上代数方程有根式解当且仅当其 Galois 群可解"这个重要结论的证明. 课程从群讲起, 也以群来结束.
- 由于时间所限, 模、格等代数结构只能忍痛割爱不讲了, 仅仅引入一个概念估计对学生的帮助也不大. 平行地我们现在给本科生还开了《代数学 (实验班)》课程 (学生自由选择), 该课程两个学期, 每周 3 学时, 可以讲更多的代数内容.

课程引入

- 下面简介我的一些做法.

课程引入

- 下面简介我的一些做法.
- 课程伊始, 先给学生提了下面几个问题:

课程引入

- 下面简介我的一些做法.
- 课程伊始, 先给学生提了下面几个问题:

1. 为什么 $(-1)(-1) = 1$?

课程引入

- 下面简介我的一些做法.
- 课程伊始, 先给学生提了下面几个问题:

1. 为什么 $(-1)(-1)=1$?
2. 设 n 为正整数, 则 $\leq n$ 且与 n 互素的正整数的乘积模 n 同余于多少?

- 下面简介我的一些做法.
- 课程伊始, 先给学生提了下面几个问题:

1. 为什么 $(-1)(-1)=1$?
2. 设 n 为正整数, 则 $\leq n$ 且与 n 互素的正整数的乘积模 n 同余于多少?
3. 可以定义实数对 (二元组) 的加法和乘法, 使其满足我们熟知的一些运算法则, 如加法交换律和结合律、乘法交换律和结合律以及乘法对加法的分配律, 并且每个实数 a 可以看成实数对 $(a,0)$. 对实数三元组是否也可以如此操作?

课程引入

- 下面简介我的一些做法.
- 课程伊始, 先给学生提了下面几个问题:

1. 为什么 $(-1)(-1) = 1$?
2. 设 n 为正整数, 则 $\leq n$ 且与 n 互素的正整数的乘积模 n 同余于多少?
3. 可以定义实数对 (二元组) 的加法和乘法, 使其满足我们熟知的一些运算法则, 如加法交换律和结合律、乘法交换律和结合律以及乘法对加法的分配律, 并且每个实数 a 可以看成实数对 $(a, 0)$. 对实数三元组是否也可以如此操作?
4. 求方程 $x^2 + 2 = y^3$ 的所有整数解.

课程引入

- 下面简介我的一些做法.
- 课程伊始, 先给学生提了下面几个问题:

1. 为什么 $(-1)(-1) = 1$?
2. 设 n 为正整数, 则 $\leq n$ 且与 n 互素的正整数的乘积模 n 同余于多少?
3. 可以定义实数对 (二元组) 的加法和乘法, 使其满足我们熟知的一些运算法则, 如加法交换律和结合律、乘法交换律和结合律以及乘法对加法的分配律, 并且每个实数 a 可以看成实数对 $(a, 0)$. 对实数三元组是否也可以如此操作?
4. 求方程 $x^2 + 2 = y^3$ 的所有整数解.
5. 能否只用直尺和圆规把 60° 角三等分?

课程引入

- 下面简介我的一些做法.
- 课程伊始, 先给学生提了下面几个问题:

1. 为什么 $(-1)(-1) = 1$?
2. 设 n 为正整数, 则 $\leq n$ 且与 n 互素的正整数的乘积模 n 同余于多少?
3. 可以定义实数对 (二元组) 的加法和乘法, 使其满足我们熟知的一些运算法则, 如加法交换律和结合律、乘法交换律和结合律以及乘法对加法的分配律, 并且每个实数 a 可以看成实数对 $(a, 0)$. 对实数三元组是否也可以如此操作?
4. 求方程 $x^2 + 2 = y^3$ 的所有整数解.
5. 能否只用直尺和圆规把 60° 角三等分?
6. 能否根式求解 5 次方程 $x^5 - 6x + 3 = 0$?

- 下面简介我的一些做法.
- 课程伊始, 先给学生提了下面几个问题:

1. 为什么 $(-1)(-1)=1$?
2. 设 n 为正整数, 则 $\leq n$ 且与 n 互素的正整数的乘积模 n 同余于多少?
3. 可以定义实数对 (二元组) 的加法和乘法, 使其满足我们熟知的一些运算法则, 如加法交换律和结合律、乘法交换律和结合律以及乘法对加法的分配律, 并且每个实数 a 可以看成实数对 $(a,0)$. 对实数三元组是否也可以如此操作?
4. 求方程 $x^2+2=y^3$ 的所有整数解.
5. 能否只用直尺和圆规把 60° 角三等分?
6. 能否根式求解 5 次方程 $x^5-6x+3=0$?

- 告诉学生课程要学习什么, 为什么我们关注的是运算性质? 抽象有什么意义? 给出英国著名哲学家 Alfred North Whitehead (1861—1947) 所说: “最高的抽象是控制我们对具体事物的思想的真正武器. (the utmost abstractions are the true weapons with which to control our thought of concrete fact.)”

几点做法

- 群论部分特别强调群作用的思想，课程讲授中比较早地引入群作用．比如把子群的陪集作为子群在群上的左乘 (右乘) 作用的轨道．特别地由群在自身上的左乘作用就给出 Cayley 定理．关注几类特别的群作用在课程中的重要地位，如子群在群上的左乘 (右乘) 作用，群在自身上的共轭作用 (给出 p-群的结果)，群在其子集集合上的左乘作用，群在其子群集合上的共轭作用，群在其左商集 (左陪集集合) 上的左乘作用等．通过三个 Sylow 定理的证明体现其应用的广泛性．

几点做法

- 群论部分特别强调群作用的思想，课程讲授中比较早地引入群作用. 比如把子群的陪集作为子群在群上的左乘 (右乘) 作用的轨道. 特别地由群在自身上的左乘作用就给出 Cayley 定理. 关注几类特别的群作用在课程中的重要地位，如子群在群上的左乘 (右乘) 作用，群在自身上的共轭作用 (给出 p-群的结果)，群在其子集集合上的左乘作用，群在其子群集合上的共轭作用，群在其左商集 (左陪集集合) 上的左乘作用等. 通过三个 Sylow 定理的证明体现其应用的广泛性.
- 强调同态基本定理的重要地位，首先得到同构定理和对应定理，还给出其它应用，如 N/C 定理等. (可以说一个人是否学好了代数课程就看其对同态基本定理的应用程度)

几点做法

- 群论部分特别强调群作用的思想，课程讲授中比较早地引入群作用．比如把子群的陪集作为子群在群上的左乘 (右乘) 作用的轨道．特别地由群在自身上的左乘作用就给出 Cayley 定理．关注几类特别的群作用在课程中的重要地位，如子群在群上的左乘 (右乘) 作用，群在自身上的共轭作用 (给出 p-群的结果)，群在其子集集合上的左乘作用，群在其子群集合上的共轭作用，群在其左商集 (左陪集集合) 上的左乘作用等．通过三个 Sylow 定理的证明体现其应用的广泛性．
- 强调同态基本定理的重要地位，首先得到同构定理和对应定理，还给出其它应用，如 N/C 定理等．(可以说一个人是否学好了代数课程就看其对同态基本定理的应用程度)
- 强调例子的重要性，每一个概念都对应一些典型的例子．

几点做法

- 群论部分特别强调群作用的思想，课程讲授中比较早地引入群作用。比如把子群的陪集作为子群在群上的左乘 (右乘) 作用的轨道. 特别地由群在自身上的左乘作用就给出 Cayley 定理. 关注几类特别的群作用在课程中的重要地位，如子群在群上的左乘 (右乘) 作用，群在自身上的共轭作用 (给出 p-群的结果)，群在其子集集合上的左乘作用，群在其子群集合上的共轭作用，群在其左商集 (左陪集集合) 上的左乘作用等. 通过三个 Sylow 定理的证明体现其应用的广泛性.
- 强调同态基本定理的重要地位，首先得到同构定理和对应定理，还给出其它应用，如 N/C 定理等. (可以说一个人是否学好了代数课程就看其对同态基本定理的应用程度)
- 强调例子的重要性，每一个概念都对应一些典型的例子.
- 通过对一些特殊阶有限群结构的确定来让学生熟练地应用所学的一些基本知识. 例如: 设 p 为素数，则 p 阶群一定循环，p^2 阶群或者循环或者为两个 p 阶循环群的直积，$2p$ 阶群或者循环或者为二面体群; 设 $p < q$ 为两个素数，分类 pq 阶群; 分类 8 阶群等. 这样也给了学生很多群的具体例子.

255 阶群

- 255 阶群一定是循环群.

255 阶群

- 255 阶群一定是循环群.
- 设 G 为 255 阶群. 由于 $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$, 容易得到 G 的 Sylow 17-子群唯一, 设 H 为 G 的 Sylow 17-子群, 故 H 为 17 阶循环群且 $H \trianglelefteq G$.

255 阶群

- 255 阶群一定是循环群.
- 设 G 为 255 阶群. 由于 $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$, 容易得到 G 的 Sylow 17-子群唯一, 设 H 为 G 的 Sylow 17-子群, 故 H 为 17 阶循环群且 $H \trianglelefteq G$.
- 对 H 利用 N/C 定理, 由于 $H \trianglelefteq G$, 所以 $N_G(H) = G$, 从而 $G/C_G(H)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(H)$ 的一个子群, 故有 $|G/C_G(H)| \mid 255$ 和 $|G/C_G(H)| \mid 16$, (因为 $|\mathrm{Aut}(H)| = 16$) 由此得到 $|G/C_G(H)| = 1$, 故 $C_G(H) = G$, 这便得到 $H \leq Z(G)$. 从而 $|G/Z(G)| \mid |G/H| = 15$, 即 $|G/Z(G)| = 1, 3, 5$ 或者 15. 故 $G/Z(G)$ 为循环群, 由 G/Z 定理得到 G 交换.

255 阶群

- 255 阶群一定是循环群.
- 设 G 为 255 阶群. 由于 $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$, 容易得到 G 的 Sylow 17-子群唯一, 设 H 为 G 的 Sylow 17-子群, 故 H 为 17 阶循环群且 $H \trianglelefteq G$.
- 对 H 利用 N/C 定理, 由于 $H \trianglelefteq G$, 所以 $N_G(H) = G$, 从而 $G/C_G(H)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(H)$ 的一个子群, 故有 $|G/C_G(H)| \mid 255$ 和 $|G/C_G(H)| \mid 16$, (因为 $|\mathrm{Aut}(H)| = 16$) 由此得到 $|G/C_G(H)| = 1$, 故 $C_G(H) = G$, 这便得到 $H \leq Z(G)$. 从而 $|G/Z(G)| \mid |G/H| = 15$, 即 $|G/Z(G)| = 1, 3, 5$ 或者 15. 故 $G/Z(G)$ 为循环群, 由 G/Z 定理得到 G 交换.
- 所以, G 的 Sylow 3-子群和 Sylow 5-子群都是正规子群, 从而唯一. 设 K 为 G 的 Sylow 3-子群, L 为 G 的 Sylow 5-子群, 容易验证得到 $G = KLH$ 且 $K \cap LH = L \cap KH = H \cap KL = \{e\}$, 所以 $G \cong K \times L \times H$. 注意到 K, L, H 为阶数彼此互素的循环群, 从而 G 为循环群.

255 阶群

- 255 阶群一定是循环群.
- 设 G 为 255 阶群. 由于 $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$, 容易得到 G 的 Sylow 17-子群唯一, 设 H 为 G 的 Sylow 17-子群, 故 H 为 17 阶循环群且 $H \trianglelefteq G$.
- 对 H 利用 N/C 定理, 由于 $H \trianglelefteq G$, 所以 $N_G(H) = G$, 从而 $G/C_G(H)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(H)$ 的一个子群, 故有 $|G/C_G(H)| \mid 255$ 和 $|G/C_G(H)| \mid 16$, (因为 $|\mathrm{Aut}(H)| = 16$) 由此得到 $|G/C_G(H)| = 1$, 故 $C_G(H) = G$, 这便得到 $H \leq Z(G)$. 从而 $|G/Z(G)| \mid |G/H| = 15$, 即 $|G/Z(G)| = 1, 3, 5$ 或者 15. 故 $G/Z(G)$ 为循环群, 由 G/Z 定理得到 G 交换.
- 所以, G 的 Sylow 3-子群和 Sylow 5-子群都是正规子群, 从而唯一. 设 K 为 G 的 Sylow 3-子群, L 为 G 的 Sylow 5-子群, 容易验证得到 $G = KLH$ 且 $K \cap LH = L \cap KH = H \cap KL = \{e\}$, 所以 $G \cong K \times L \times H$. 注意到 K, L, H 为阶数彼此互素的循环群, 从而 G 为循环群.
- 最小有限非交换单群同构于交错群 A_5.

环的定义

- 环 R 是一非空集合，其上有两种代数运算，分别称为加法和乘法，记为“$+$”和“$\cdot$”，且满足

环的定义

- 环 R 是一非空集合, 其上有两种代数运算, 分别称为加法和乘法, 记为 "$+$" 和 "$\cdot$", 且满足
  1. R 对加法做成交换群, 即 $(R, +)$ 为交换群.

环的定义

- 环 R 是一非空集合，其上有两种代数运算，分别称为加法和乘法，记为“$+$”和“$\cdot$”，且满足
  1. R 对加法做成交换群，即 $(R, +)$ 为交换群.
  2. R 对乘法做成幺半群，即 $(R, \cdot)$ 为幺半群.

环的定义

- 环 R 是一非空集合, 其上有两种代数运算, 分别称为加法和乘法, 记为 "$+$" 和 "$\cdot$", 且满足
  1. R 对加法做成交换群, 即 $(R,+)$ 为交换群.
  2. R 对乘法做成幺半群, 即 $(R,\cdot)$ 为幺半群.
  3. 乘法对加法的分配律成立, 即对任意 $a,b,c\in R$, 有

$$a(b+c)=ab+ac,\quad (b+c)a=ba+ca.$$

环的定义

- 环 R 是一非空集合, 其上有两种代数运算, 分别称为加法和乘法, 记为 "$+$" 和 "$\cdot$", 且满足
  1. R 对加法做成交换群, 即 $(R, +)$ 为交换群.
  2. R 对乘法做成幺半群, 即 $(R, \cdot)$ 为幺半群.
  3. 乘法对加法的分配律成立, 即对任意 $a, b, c \in R$, 有

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca.$$

- 规定环中有乘法单位元. (Serge Lang 的 Algebra, Revised Third Edition, GTM 211 中说因为环中有单位元所以是 ring, 没有单位元就是 rng 了) 实际上有重要应用价值的环都有单位元, 如整环、全矩阵环等.

环的定义

- 环 R 是一非空集合, 其上有两种代数运算, 分别称为加法和乘法, 记为 "$+$" 和 "$\cdot$", 且满足
  1. R 对加法做成交换群, 即 $(R,+)$ 为交换群.
  2. R 对乘法做成幺半群, 即 $(R,\cdot)$ 为幺半群.
  3. 乘法对加法的分配律成立, 即对任意 $a,b,c\in R$, 有

$$a(b+c)=ab+ac,\quad (b+c)a=ba+ca.$$

- 规定环中有乘法单位元. (Serge Lang 的 Algebra, Revised Third Edition, GTM 211 中说因为环中有单位元所以是 ring, 没有单位元就是 rng 了) 实际上有重要应用价值的环都有单位元, 如整环、全矩阵环等.
- 子环要包括原环的单位元, 所以整数环的子环只有自身, 整数模 n 的剩余类环也是这样. 例如 $\{0,3\}$ 不是 $\mathbb{Z}_6$ 的子环, 虽然它在 $\mathbb{Z}_6$ 的运算下构成环. 真理想不是子环. (在环论中起重要作用的是理想)

环的定义

- 环 R 是一非空集合，其上有两种代数运算，分别称为加法和乘法，记为 “$+$” 和 “$\cdot$”，且满足
  1. R 对加法做成交换群，即 $(R, +)$ 为交换群.
  2. R 对乘法做成幺半群，即 $(R, \cdot)$ 为幺半群.
  3. 乘法对加法的分配律成立，即对任意 $a, b, c \in R$，有

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca.$$

- 规定环中有乘法单位元. (Serge Lang 的 Algebra, Revised Third Edition, GTM 211 中说因为环中有单位元所以是 ring, 没有单位元就是 rng 了) 实际上有重要应用价值的环都有单位元，如整环、全矩阵环等.
- 子环要包括原环的单位元，所以整数环的子环只有自身，整数模 n 的剩余类环也是这样. 例如 $\{0, 3\}$ 不是 $\mathbb{Z}_6$ 的子环，虽然它在 $\mathbb{Z}_6$ 的运算下构成环. 真理想不是子环. (在环论中起重要作用的是理想)
- 环的同态除保持运算外也要把单位元映成单位元，所以零映射不是环同态 (除非映过去的环是零环). 这可以很好地说明从域出发的同态一定是单同态.

多项式环

- 多项式环是一类重要的环，可以给我们提供很多基本的例子，教学中要特别关注.

多项式环

- 多项式环是一类重要的环, 可以给我们提供很多基本的例子, 教学中要特别关注.
- 交换环 R 上的一元多项式环 $R[x]$. 注意它与域上的多项式环的不同之处.

- 多项式环是一类重要的环, 可以给我们提供很多基本的例子, 教学中要特别关注.
- 交换环 R 上的一元多项式环 $R[x]$. 注意它与域上的多项式环的不同之处.
- $\deg(f(x)+g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$, $\deg(f(x)g(x)) \leq \deg f(x)+\deg g(x)$. 若 R 为整环, 则 $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x)+\deg g(x)$, 从而 $R[x]$ 也是整环.

- 多项式环是一类重要的环，可以给我们提供很多基本的例子，教学中要特别关注.
- 交换环 R 上的一元多项式环 $R[x]$. 注意它与域上的多项式环的不同之处.
- $\deg(f(x)+g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$, $\deg(f(x)g(x)) \leq \deg f(x)+\deg g(x)$. 若 R 为整环，则 $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x)+\deg g(x)$，从而 $R[x]$ 也是整环.
- 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$，则 $f(x)$ 可逆当且仅当 a_0 在 R 中可逆并且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是 R 中的幂零元. (交换环 R 的所有素理想的交恰由 R 的所有幂零元组成)

多项式环

- 多项式环是一类重要的环，可以给我们提供很多基本的例子，教学中要特别关注.
- 交换环 R 上的一元多项式环 $R[x]$. 注意它与域上的多项式环的不同之处.
- $\deg(f(x)+g(x)) \le \max(\deg f(x), \deg g(x))$,
  $\deg(f(x)g(x)) \le \deg f(x) + \deg g(x)$. 若 R 为整环，则
  $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$，从而 $R[x]$ 也是整环.
- 设 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$，则 $f(x)$ 可逆当且仅当 a_0 在 R 中可逆并且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是 R 中的幂零元. (交换环 R 的所有素理想的交恰由 R 的所有幂零元组成)
- 通常 $R[x]$ 中没有带余除法，比如在整系数多项式环中不能用 $2x+1$ 去除 x^3+2，但是它可以推广为：设 R 为交换环，$g(x) \in R[x]$ 且 $g(x)$ 的首项系数为 R 中的可逆元，则对任意 $f(x) \in R[x]$，存在唯一的多项式 $q(x), r(x) \in R[x]$ 使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \text{ 且 } r(x) = 0 \text{ 或 } \deg r(x) < \deg g(x).$$

环同构定理的一个应用

- 求商环 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2)$.

环同构定理的一个应用

- 求商环 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2)$.
- 定义映射 $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ 为 $\varphi(f(x)) = f(2)$, 这是环的满同态且 $\mathrm{Ker}\varphi = (x-2)$. 注意到理想 $(x^2+1, x-2)$ 包含 $\mathrm{Ker}\varphi$, 由第三同构定理有 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2) \cong \mathbb{Z}/\varphi((x^2+1, x-2))$. 进一步地,
$$\varphi((x^2+1, x-2)) = (\varphi(x^2+1), \varphi(x-2)) = (2^2+1, 2-2) = (5),$$
所以 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2) \cong \mathbb{Z}/(5) = \mathbb{Z}_5$ 是 5 元域.

- 求商环 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2)$.
- 定义映射 $\varphi: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ 为 $\varphi(f(x)) = f(2)$, 这是环的满同态且 $\mathrm{Ker}\varphi = (x-2)$. 注意到理想 $(x^2+1, x-2)$ 包含 $\mathrm{Ker}\varphi$, 由第三同构定理有 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2) \cong \mathbb{Z}/\varphi((x^2+1, x-2))$. 进一步地,
$$\varphi((x^2+1, x-2)) = (\varphi(x^2+1), \varphi(x-2)) = (2^2+1, 2-2) = (5),$$
所以 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2) \cong \mathbb{Z}/(5) = \mathbb{Z}_5$ 是 5 元域.
- 考察替换映射 $\psi: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i]$ 为 $\varphi(f(x)) = f(i)$, 这也是环的满同态且 $\mathrm{Ker}\psi = (x^2+1)$. 事实上, 由 $i^2+1=0$ 有 $x^2+1 \in \mathrm{Ker}\psi$. 反之, 任取 $f(x) \in \mathrm{Ker}\psi$, 因为 x^2+1 首项系数为 1, 可以做带余除法得到 $f(x) = q(x)(x^2+1) + r(x)$, 其中 $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 且 $r(x)$ 的次数 < 2. 设 $r(x) = ax+b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. 由 $f(i) = 0$ 得到 $r(i) = 0$, 从而 $a = b = 0$, 即 $r(x) = 0$. 所以 $f(x) = q(x)(x^2+1) \in (x^2+1)$. 由第三同构定理有 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2) \cong \mathbb{Z}[i]/\psi((x^2+1, x-2))$. 计算得到 $\psi((x^2+1, x-2)) = (i^2+1, i-2) = (-2+i)$. 所以 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2) \cong \mathbb{Z}[i]/(-2+i)$.

- 求商环 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2)$.
- 定义映射 $\varphi: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ 为 $\varphi(f(x)) = f(2)$, 这是环的满同态且 $\mathrm{Ker}\varphi = (x-2)$. 注意到理想 $(x^2+1, x-2)$ 包含 $\mathrm{Ker}\varphi$, 由第三同构定理有 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2) \cong \mathbb{Z}/\varphi((x^2+1, x-2))$. 进一步地,
$$\varphi((x^2+1, x-2)) = (\varphi(x^2+1), \varphi(x-2)) = (2^2+1, 2-2) = (5),$$
所以 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2) \cong \mathbb{Z}/(5) = \mathbb{Z}_5$ 是 5 元域.
- 考察替换映射 $\psi: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i]$ 为 $\varphi(f(x)) = f(i)$, 这也是环的满同态且 $\mathrm{Ker}\psi = (x^2+1)$. 事实上, 由 $i^2+1=0$ 有 $x^2+1 \in \mathrm{Ker}\psi$. 反之, 任取 $f(x) \in \mathrm{Ker}\psi$, 因为 x^2+1 首项系数为 1, 可以做带余除法得到 $f(x) = q(x)(x^2+1) + r(x)$, 其中 $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 且 $r(x)$ 的次数 < 2. 设 $r(x) = ax+b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. 由 $f(i) = 0$ 得到 $r(i) = 0$, 从而 $a = b = 0$, 即 $r(x) = 0$. 所以 $f(x) = q(x)(x^2+1) \in (x^2+1)$. 由第三同构定理有 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2) \cong \mathbb{Z}[i]/\psi((x^2+1, x-2))$. 计算得到 $\psi((x^2+1, x-2)) = (i^2+1, i-2) = (-2+i)$. 所以 $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1, x-2) \cong \mathbb{Z}[i]/(-2+i)$.
- 由此得到 $\mathbb{Z}[i]/(-2+i) \cong \mathbb{Z}_5$.

唯一分解整环中的多项式环

- 若 R 为 UFD, 则 $R[x]$ 也是 UFD.

- 若 R 为 UFD, 则 $R[x]$ 也是 UFD.
- Hilbert 基定理: 若 R 是 Noether 环, 则 $R[x]$ 也是 Noether 环. (选讲)

唯一分解整环中的多项式环

- 若 R 为 UFD, 则 $R[x]$ 也是 UFD.
- Hilbert 基定理: 若 R 是 Noether 环, 则 $R[x]$ 也是 Noether 环. (选讲)
- $R[x]$ 是 PID 当且仅当 R 是域.

唯一分解整环中的多项式环

- 若 R 为 UFD, 则 $R[x]$ 也是 UFD.
- Hilbert 基定理: 若 R 是 Noether 环, 则 $R[x]$ 也是 Noether 环. (选讲)
- $R[x]$ 是 PID 当且仅当 R 是域.
- 设 F 是域, R 是 F 上所有 x 的系数为 0 的多项式构成的集合, 则 R 为 $F[x]$ 的子环, 从而是整环. 进一步地容易证明 R 中的元素 x^2, x^3 是 R 的不可约元但不是素元, 所以 UFD 的子环不一定是 UFD.

- 若 R 为 UFD, 则 $R[x]$ 也是 UFD.
- Hilbert 基定理: 若 R 是 Noether 环, 则 $R[x]$ 也是 Noether 环. (选讲)
- $R[x]$ 是 PID 当且仅当 R 是域.
- 设 F 是域, R 是 F 上所有 x 的系数为 0 的多项式构成的集合, 则 R 为 $F[x]$ 的子环, 从而是整环. 进一步地容易证明 R 中的元素 x^2, x^3 是 R 的不可约元但不是素元, 所以 UFD 的子环不一定是 UFD.
- 我们知道欧氏环 R 中带余除法的商和余元不一定唯一, 域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 是欧氏环. 但是若欧氏环 R 中带余除法的商和余元是唯一的, 则 $R = F[x]$.

唯一分解整环中的多项式环

- 若 R 为 UFD, 则 $R[x]$ 也是 UFD.
- Hilbert 基定理: 若 R 是 Noether 环, 则 $R[x]$ 也是 Noether 环. (选讲)
- $R[x]$ 是 PID 当且仅当 R 是域.
- 设 F 是域, R 是 F 上所有 x 的系数为 0 的多项式构成的集合, 则 R 为 $F[x]$ 的子环, 从而是整环. 进一步地容易证明 R 中的元素 x^2, x^3 是 R 的不可约元但不是素元, 所以 UFD 的子环不一定是 UFD.
- 我们知道欧氏环 R 中带余除法的商和余元不一定唯一, 域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 是欧氏环. 但是若欧氏环 R 中带余除法的商和余元是唯一的, 则 $R = F[x]$.
- 域上的一元多项式环用于构造扩域. 设 F 是域, $f(x) \in F[x]$ 在 F 上不可约, 则 $F[x]/(f(x))$ 是 F 的扩域. 进一步地, 若 $\deg f(x) \geq 2$, 则 $f(x)$ 在 F 中无根, 但在 $F[x]/(f(x))$ 中有根 $x + (f(x))$. 这也是多项式分裂域存在的基础.

唯一分解整环中的多项式环

- 若 R 为 UFD, 则 $R[x]$ 也是 UFD.
- Hilbert 基定理: 若 R 是 Noether 环, 则 $R[x]$ 也是 Noether 环. (选讲)
- $R[x]$ 是 PID 当且仅当 R 是域.
- 设 F 是域, R 是 F 上所有 x 的系数为 0 的多项式构成的集合, 则 R 为 $F[x]$ 的子环, 从而是整环. 进一步地容易证明 R 中的元素 x^2, x^3 是 R 的不可约元但不是素元, 所以 UFD 的子环不一定是 UFD.
- 我们知道欧氏环 R 中带余除法的商和余元不一定唯一, 域 F 上的一元多项式环 $F[x]$ 是欧氏环. 但是若欧氏环 R 中带余除法的商和余元是唯一的, 则 $R = F[x]$.
- 域上的一元多项式环用于构造扩域. 设 F 是域, $f(x) \in F[x]$ 在 F 上不可约, 则 $F[x]/(f(x))$ 是 F 的扩域. 进一步地, 若 $\deg f(x) \geq 2$, 则 $f(x)$ 在 F 中无根, 但在 $F[x]/(f(x))$ 中有根 $x + (f(x))$. 这也是多项式分裂域存在的基础.
- $F[x]/(f(x))$ 是 F 的单代数扩张, 反之 F 的每个单代数一定为某个 $F[x]/(f(x))$.

- 抽象代数的课堂要以教师讲授为主. 但教师讲最基本、最核心的部分, 剩下的内容留给学生自我阅读. 如有限域上特殊线性群的单性、对称群 S_n 的自同构群、是 PID 但不是 ED 的整环、4 次或 5 次不可约多项式的 Galois 群等等.

课堂组织

- 抽象代数的课堂要以教师讲授为主. 但教师讲最基本、最核心的部分, 剩下的内容留给学生自我阅读. 如有限域上特殊线性群的单性、对称群 S_n 的自同构群、是 PID 但不是 ED 的整环、4 次或 5 次不可约多项式的 Galois 群等等.
- 另外组织小班课. 课堂上以学生讲授为主, 内容是课程补充的一些材料, 定理、典型的例子等.

课堂组织

- 抽象代数的课堂要以教师讲授为主. 但教师讲最基本、最核心的部分, 剩下的内容留给学生自我阅读. 如有限域上特殊线性群的单性、对称群 S_n 的自同构群、是 PID 但不是 ED 的整环、4 次或 5 次不可约多项式的 Galois 群等等.
- 另外组织小班课. 课堂上以学生讲授为主, 内容是课程补充的一些材料, 定理、典型的例子等.
- 小班课的一些主题: 三维欧氏空间的保距变换群 $E(3)$, 正交群 $O(3)$, 旋转群 $SO(3)$ 的基本性质和它们之间的关系; 自由群的子群; 群代数; Lie 代数的定义和基本性质; Gauss 的二平方和定理; 有限域的性质与构造等.

课堂组织

- 抽象代数的课堂要以教师讲授为主. 但教师讲最基本、最核心的部分, 剩下的内容留给学生自我阅读. 如有限域上特殊线性群的单性、对称群 S_n 的自同构群、是 PID 但不是 ED 的整环、4 次或 5 次不可约多项式的 Galois 群等等.
- 另外组织小班课. 课堂上以学生讲授为主, 内容是课程补充的一些材料, 定理、典型的例子等.
- 小班课的一些主题: 三维欧氏空间的保距变换群 $E(3)$, 正交群 $O(3)$, 旋转群 $SO(3)$ 的基本性质和它们之间的关系; 自由群的子群; 群代数; Lie 代数的定义和基本性质; Gauss 的二平方和定理; 有限域的性质与构造等.
- 作业很重要, 我会布置比较多的作业, 如果有学生实在完成不了也可以只完成一部分.

课程思政

- 抽象代数课程不是政治课, 要在课堂教学中润物无声地融入思政理念.

课程思政

- 抽象代数课程不是政治课，要在课堂教学中润物无声地融入思政理念.
- 抽象代数课有天然的思政元素，比如通过对相关知识和理论发展过程的讲授，让学生体会人类对知识和真理的不懈追求，培养学生勇于探索的科学精神.

课程思政

- 抽象代数课程不是政治课，要在课堂教学中润物无声地融入思政理念.
- 抽象代数课有天然的思政元素，比如通过对相关知识和理论发展过程的讲授，让学生体会人类对知识和真理的不懈追求，培养学生勇于探索的科学精神.
- 通过讲授中国数学家的贡献，增强学生的文化自信心与民族自豪感. 如中国剩余定理，介绍《孙子算经》中"物不知其数"中国古代名题，秦九韶的大衍求一术，还可以介绍这个结论在现代科技中的重要作用.

- 抽象代数课程不是政治课, 要在课堂教学中润物无声地融入思政理念.
- 抽象代数课有天然的思政元素, 比如通过对相关知识和理论发展过程的讲授, 让学生体会人类对知识和真理的不懈追求, 培养学生勇于探索的科学精神.
- 通过讲授中国数学家的贡献, 增强学生的文化自信心与民族自豪感. 如中国剩余定理, 介绍《孙子算经》中“物不知其数”中国古代名题, 秦九韶的大衍求一术, 还可以介绍这个结论在现代科技中的重要作用.
- 著名数学家华罗庚的事迹. 华罗庚证明了体的半自同构必为自同构或反自同构, 不是域的体的乘法群不可解等等. 他有很强的洞察力, 例如, 在体中, 若 $ab \neq ba$, 则

$$a = [b^{-1} - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)][a^{-1}b^{-1}a - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)]^{-1},$$

这一恒等式验证起来并不难, 但使人惊叹的是华罗庚如何发现它的! 华罗庚在典型群方面的工作十分出色, 和他的学生的研究被国外学者称为典型群的中国学派. 矩阵几何的研究则始自华罗庚.

成效

- 从 1998 年算起, 20 多年来，近 5000 名学生上过我们的抽象代数课. 我们培养的学生在中长期的优秀发展验证了课程改革的效果, 一大批综合素质高、创新意识强的优秀数学研究人才脱颖而出, 他们在课程中培养了兴趣, 日后选择在代数相关领域深造并作出成绩, 例如许晨阳、刘若川、张伟、恽之玮、袁新意、朱歆文、肖梁等享誉海内外的黄金一代已成长为国际顶尖的数学家.

成效

- 从 1998 年算起, 20 多年来, 近 5000 名学生上过我们的抽象代数课. 我们培养的学生在中长期的优秀发展验证了课程改革的效果, 一大批综合素质高、创新意识强的优秀数学研究人才脱颖而出, 他们在课程中培养了兴趣, 日后选择在代数相关领域深造并作出成绩, 例如许晨阳、刘若川、张伟、恽之玮、袁新意、朱歆文、肖梁等享誉海内外的黄金一代已成长为国际顶尖的数学家.
- 我们的课上还有非数学专业的学生, 他们在课堂上也受到了良好的代数训练. 如北京大学光华管理学院 15 级一位本科生在上过抽象代数课后发微信给我, 说到"从一开始害怕代数, 渐渐发现代数也是挺可爱的", "习惯了一些从定义出发而不是从直觉特例出发的思考". 这就是对学生思维能力的一个培养.

成效

- 从 1998 年算起, 20 多年来，近 5000 名学生上过我们的抽象代数课. 我们培养的学生在中长期的优秀发展验证了课程改革的效果, 一大批综合素质高、创新意识强的优秀数学研究人才脱颖而出, 他们在课程中培养了兴趣, 日后选择在代数相关领域深造并作出成绩, 例如许晨阳、刘若川、张伟、恽之玮、袁新意、朱歆文、肖梁等享誉海内外的黄金一代已成长为国际顶尖的数学家.
- 我们的课上还有非数学专业的学生, 他们在课堂上也受到了良好的代数训练. 如北京大学光华管理学院 15 级一位本科生在上过抽象代数课后发微信给我, 说到“从一开始害怕代数, 渐渐发现代数也是挺可爱的”, “习惯了一些从定义出发而不是从直觉特例出发的思考”. 这就是对学生思维能力的一个培养.
- 课程作为重要组成部分的项目《数学专业本科生课程体系建设》获得第六届高等教育国家级教学成果奖二等奖, 另一个项目《北京大学代数类课程体系的综合改革》获得第七届北京市高等教育教学成果奖一等奖. 我们还对北京大学数学学院的国家级优秀教学团队、国家级特色专业等荣誉的获得作出了重要贡献.

成效

- 从 1998 年算起, 20 多年来，近 5000 名学生上过我们的抽象代数课. 我们培养的学生在中长期的优秀发展验证了课程改革的效果，一大批综合素质高、创新意识强的优秀数学研究人才脱颖而出，他们在课程中培养了兴趣，日后选择在代数相关领域深造并作出成绩，例如许晨阳、刘若川、张伟、恽之玮、袁新意、朱歆文、肖梁等享誉海内外的黄金一代已成长为国际顶尖的数学家.
- 我们的课上还有非数学专业的学生，他们在课堂上也受到了良好的代数训练. 如北京大学光华管理学院 15 级一位本科生在上过抽象代数课后发微信给我，说到“从一开始害怕代数，渐渐发现代数也是挺可爱的”，“习惯了一些从定义出发而不是从直觉特例出发的思考”. 这就是对学生思维能力的一个培养.
- 课程作为重要组成部分的项目《数学专业本科生课程体系建设》获得第六届高等教育国家级教学成果奖二等奖，另一个项目《北京大学代数类课程体系的综合改革》获得第七届北京市高等教育教学成果奖一等奖. 我们还对北京大学数学学院的国家级优秀教学团队、国家级特色专业等荣誉的获得作出了重要贡献.
- 当然也有学不会的学生.

总结

- 抽象代数课程中学习的是最基本的代数结构 (集合加运算): 群、环、域, 以及代数结构之间的关系 (同态). 这些代数结构来源于初等数论、多项式理论、线性代数, 这些给我们提供了丰富的例子.

总结

- 抽象代数课程中学习的是最基本的代数结构 (集合加运算): 群、环、域, 以及代数结构之间的关系 (同态). 这些代数结构来源于初等数论、多项式理论、线性代数, 这些给我们提供了丰富的例子.
- 对学生来说, 学好抽象代数需要很多例子, 所以需要多做习题, 达到对抽象的结构有直觉和感受.

总结

- 抽象代数课程中学习的是最基本的代数结构 (集合加运算): 群、环、域, 以及代数结构之间的关系 (同态). 这些代数结构来源于初等数论、多项式理论、线性代数, 这些给我们提供了丰富的例子.
- 对学生来说, 学好抽象代数需要很多例子, 所以需要多做习题, 达到对抽象的结构有直觉和感受.
- 学生还要学习代数的思想方法, 比如说特殊与一般、抽象、同构意义下的分类. 代数结构间的互相联系来自于同态映射.

总结

- 抽象代数课程中学习的是最基本的代数结构 (集合加运算): 群、环、域, 以及代数结构之间的关系 (同态). 这些代数结构来源于初等数论、多项式理论、线性代数, 这些给我们提供了丰富的例子.
- 对学生来说, 学好抽象代数需要很多例子, 所以需要多做习题, 达到对抽象的结构有直觉和感受.
- 学生还要学习代数的思想方法, 比如说特殊与一般、抽象、同构意义下的分类. 代数结构间的互相联系来自于同态映射.
- 学生还要联系严格的逻辑推理能力和抽象的思维能力.

总结

- 抽象代数课程中学习的是最基本的代数结构 (集合加运算): 群、环、域, 以及代数结构之间的关系 (同态). 这些代数结构来源于初等数论、多项式理论、线性代数, 这些给我们提供了丰富的例子.
- 对学生来说, 学好抽象代数需要很多例子, 所以需要多做习题, 达到对抽象的结构有直觉和感受.
- 学生还要学习代数的思想方法, 比如说特殊与一般、抽象、同构意义下的分类. 代数结构间的互相联系来自于同态映射.
- 学生还要联系严格的逻辑推理能力和抽象的思维能力.
- 熟悉群作用的思想并用于解决问题, 熟练应用同态基本定理.

谢谢!